

Stabilité et convection naturelle au sein d'une couche poreuse non homogène

JEAN GOUNOT et JEAN PAUL CALTAGIRONE

L.E.P.T. ENSAM, C.N.R.S. U.A. 873, Esplanade des Arts et Métiers,
33405 Talence Cedex, France

(Reçu le 18 avril 1988 et sous la forme finale le 18 juillet 1988)

Résumé—Les milieux poreux envisagés possèdent une perméabilité variant en fonction de la coordonnée d'espace horizontale. Une méthode générale est proposée pour déterminer le critère d'apparition de la convection à partir de l'état de repos. Quelques applications traitent du cas de fonctions périodiques d'espace et montrent l'équivalence de ce milieu avec un milieu anisotrope pour de grands nombres d'onde de la fluctuation. Dans une seconde partie, une intégration des équations de transfert est proposée, pour des fluctuations de perméabilité suivant une ou deux directions d'espace. Enfin quelques résultats montrent l'influence de ces fluctuations sur les écoulements et sur le transfert de chaleur.

1. INTRODUCTION

LES PHÉNOMÈNES de convection naturelle dans une couche poreuse horizontale, chauffée par le dessous, constituent un problème bien connu, auquel de nombreux auteurs ont apporté leur contribution depuis Horton et Rogers [1] ; la convection apparaît pour un nombre de Rayleigh critique Ra_c^* égal à $4\pi^2$ dans une couche homogène, isotrope, de grande extension latérale, confinée entre deux plans isothermes et imperméables. Cependant, les milieux naturels présentent rarement des propriétés constantes dans l'ensemble d'un massif géologique, et par exemple, des variations de perméabilité de plusieurs ordres de grandeur peuvent être observées dans de tels milieux. Sans aucun doute, cette variation de perméabilité est la plus spectaculaire par son amplitude. C'est pourquoi il nous paraît important d'estimer l'effet de ces variations tant sur le critère d'apparition de la convection que sur la forme des structures convectives qui peuvent se mettre en place en fonction des distributions de perméabilité.

Green et Freehill [2] envisagent des variations linéaires de la conductivité équivalente et de l'inverse de la perméabilité en fonction de la profondeur ; ils en déduisent une diminution du nombre de Rayleigh critique lorsque la pente de ces variations augmente en fonction de la profondeur.

Dans une étude numérique de phénomènes non linéaires, Ribando et Torrance [3] considèrent des variations exponentielles du rapport viscosité dynamique/perméabilité, associées à différents types de conditions aux limites. Une simulation numérique par éléments finis montre l'influence du rapport μ/K en fonction de la coordonnée verticale, sur les champs de température et de fonction de courant.

Horne et O'Sullivan [4] examinent les variations de propriétés physiques du fluide saturant, en particulier les dépendances de la viscosité et du coefficient

d'expansion thermique en fonction de la température. Leur étude est principalement tournée vers la compréhension des mécanismes de mouvements fluctuants.

Gjerde et Tyvand [5] étudient la stabilité d'une couche dont la perméabilité est une fonction continue et périodique de la profondeur. Ils montrent en particulier que lorsque le nombre de périodes s'accroît au sein du milieu, celui-ci devient assimilable à un milieu homogène et anisotrope.

De nombreux autres travaux se rapportent au problème de couches poreuses stratifiées, confinées entre deux limites isothermes ; sur ce sujet, on pourra consulter les publications de : Gheorghita [6], Kvernvold et Tyvand [7], McKibbin et O'Sullivan [8, 9], Richard et Gounot [10], McKibbin et Tyvand [11]. Ces auteurs traitent le problème tant sous les aspects d'analyse de stabilité que de ceux de la modélisation numérique d'effets non linéaires.

Dans la présente publication, nous nous attachons à déterminer les conditions de stabilité critique d'une couche horizontale chauffée par le bas, en tenant compte des variations transversales de la perméabilité, et à étudier le couplage de différents modes convectifs en fonction de l'amplitude et de la période spatiale des variations de perméabilité.

2. FORMULATION DU PROBLEME

Nous étudions une couche poreuse horizontale d'épaisseur H , d'extension latérale L , définissant ainsi le rapport de forme $A = L/H$. La couche poreuse inhomogène est caractérisée sa perméabilité $K(x)$, fonction des variables d'espace. Le fluide saturant est défini par son coefficient d'expansion thermique volumique β , sa viscosité cinématique ν , sa chaleur volumique (ρc) , et sa masse volumique ρ fonction de la température. Le milieu poreux ainsi caractérisé

NOMENCLATURE

a_{ij}, b_{ij}	coefficients des développements des perturbations	Lettres grecques
A	rapport de forme de la couche, L/H	α amplitude d'une fluctuation de perméabilité
c	chaleur volumique	β coefficient d'expansion thermique
e_1, e_2, e_3	vecteurs de base	δ_{ij} symbole de Kronecker $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$
$f(x)$	fonction d'espace décrivant la distribution de perméabilité	θ perturbation de température
g	accélération de la pesanteur	λ conductivité thermique
K	perméabilité	μ viscosité dynamique
Nu	nombre de Nusselt	ν viscosité cinématique
p	pression motrice	ρ masse volumique
Ra^*	nombre de Rayleigh de filtration, $g\beta(\rho c)_r \Delta T K_0 H / \nu \lambda^*$	Ψ fonction de courant
s	nombre d'onde décrivant la fluctuation de perméabilité	ω perturbation de pression.
t	temps	Indices
T	température adimensionnelle	0 relatif à l'état non perturbé
U, W	composantes de la vitesse de filtration	h composante suivant une direction horizontale
v	perturbation de vitesse	v composante suivant une direction verticale.
\mathbf{V}	vitesse de filtration.	

possède une conductivité thermique λ^* et une chaleur volumique $(\rho c)^*$.

Il est très probable que les variations spatiales de la porosité ε et de la perméabilité K sont liées à des variations des autres caractéristiques thermophysiques, notamment la conductivité thermique λ^* et la chaleur volumique $(\rho c)^*$. Toutefois, l'influence des variations de porosité sur la conductivité et la chaleur volumique ne sera pas prise en compte ici afin de dégager l'importance des variations de perméabilité sur l'apparition et le développement des divers modes convectifs dans la couche horizontale. Cette hypothèse est physiquement justifiée dans le cas où la matrice solide n'occupe qu'une faible part du volume total.

En utilisant les équations classiques de la convection en milieu poreux [12] et les grandeurs de référence suivantes : H pour les longueurs, $(\rho c)^* H^2 / \lambda$ pour le temps, $\lambda^* / H(\rho c)_r$ pour les vitesses, ΔT pour les températures et $\lambda^* \mu / K_0(\rho c)_r$ pour la pression, les équations adimensionnelles s'écrivent, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$-\nabla p + Ra^* \mathbf{e}_3 T - K^{-1} \mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T - \nabla^2 T = 0 \quad (3)$$

où $Ra^* = g\beta(\rho c)_r \Delta T K_0 / \nu \lambda^*$ est le nombre de Rayleigh de filtration et où $\mathbf{V} = U/A \mathbf{e}_1 + W \mathbf{e}_3$ est la vitesse de filtration, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ sont les vecteurs unitaires portés par les axes dans un repère orthonormé cartésien, p la pression motrice. La fonction K/K_0 est la forme

adimensionnelle de la perméabilité fonction de point $K(x)$.

En raison des constantes de temps des phénomènes étudiés, l'évolution du champ thermique est beaucoup plus lent que celle du champ de vitesse, nous avons négligé le terme d'évolution dans l'équation du mouvement (2).

Nous envisagerons par la suite des variations transversales de la perméabilité du type :

$$K(x) = 1 + f(x) \quad (4)$$

où $f(x)$ prendra une forme périodique. Ce type de dépendance peut être observé dans certaines structures géologiques où les variations de perméabilité avec la profondeur sont négligeables.

La variation périodique de perméabilité autour d'une valeur moyenne K_0 crée, pour des conditions globales critiques, des zones subcritiques et d'autres supercritiques où les phénomènes convectifs peuvent s'établir.

La couche poreuse est limitée par deux plans horizontaux imperméables et isothermes, les parois latérales de la couche sont supposées imperméables et adiabatiques.

3. STABILITÉ LINÉAIRE

3.1. Equations aux perturbations

Dans le cas d'une couche horizontale inhomogène comme dans le cas d'une couche homogène, l'apparition de la convection naturelle est liée à une valeur critique du nombre de Rayleigh de filtration Ra_c^* . Nous nous attachons ici à déterminer ces valeurs

critiques dans le cas général où la perméabilité peut se mettre sous la forme :

$$K(x) = K_0/(1+f(x)).$$

Nous limitons ici cette étude au cas d'une couche infinie suivant la direction y , et nous supposons que les mouvements qui se développent sont des rouleaux d'axes parallèles à y ; la composante suivant y de la vitesse est alors nulle.

Nous utilisons à cette fin une méthode de perturbation et les approximations de la théorie linéaire. La couche étant initialement au repos, les champs de température et de vitesse sont notés T_0 ($T_0 = 1 - z$) et V_0 ($V_0 = 0$). A cet état, on superpose des perturbations (θ et $v = u/A \mathbf{e}_1 + w \mathbf{e}_3$) puis on étudie l'évolution de ces perturbations au cours du temps : croissance et mise en mouvement de toute la couche, ou décroissance et retour à l'état conductif. Dans le cadre de la théorie linéaire, les termes du second ordre sont négligés.

Le système d'équations aux perturbations (θ , v), linéarisé au voisinage de l'état purement conductif (T_0 , V_0) s'écrit :

$$\frac{1}{A^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

$$-\nabla \bar{\omega} + Ra^* \theta \mathbf{e}_3 - [1+f(x)]v = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \left[\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] - w \quad (7)$$

où $\bar{\omega}$ représente la perturbation en pression.

Pour étudier la stabilité de la solution identiquement nulle (T_0 , V_0), on va étudier le spectre de l'opérateur associé à l'équation (7) stationnarisée. Ses valeurs propres nulles correspondent à la limite de stabilité des solutions.

Nous appliquons deux fois l'opérateur rotationnel à l'équation du mouvement. Outre l'élimination du terme de pression, cette opération fait apparaître un laplacien, couplé au terme décrivant la variation de pression dans l'espace ; le traitement d'une équation de cette forme est particulièrement adapté aux traitements numériques que nous utilisons. La projection sur \mathbf{e}_3 de l'équation obtenue s'écrit :

$$-Ra^* \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + [1+f(x)] \left[\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \frac{f'(x)}{A^2} \left[2 \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{1}{A^2} w f''(x) = 0. \quad (8)$$

Nous choisissons pour u , w , θ des développements en fonctions d'essais qui satisfont aux conditions aux limites, et à l'équation de continuité pour les composantes de la vitesse :

$$u(x, z) = A^2 \sum_{l=1}^L \sum_{n=0}^N b_{ln} l \pi \sin l \pi x \cos n \pi z \quad (9)$$

$$w(x, z) = - \sum_{l=1}^L \sum_{n=0}^N b_{ln} l \pi \cos l \pi x \sin n \pi z \quad (10)$$

$$\theta(x, z) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=0}^N a_{ln} \cos l \pi x \sin n \pi z. \quad (11)$$

L'équation (10) est alors multipliée par $i \pi \cos(i \pi x) \times \sin(k \pi z)$ puis intégrée sur tout le domaine :

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_k \left\{ Ra^* \left[\frac{l^2 \pi^2}{A^2} a_{ln} - \left(\frac{l^2 \pi^2}{A^2} + n^2 \pi^2 \right) l \pi b_{ln} \right] \frac{1}{4} \delta_{il} \delta_{kn} \right. \\ - \left(\frac{l^2 \pi^2}{A^2} + n^2 \pi^2 \right) l \pi b_{ln} \frac{\delta_{kn}}{2} \int_0^1 f(x) \cos(i \pi x) \cos(l \pi x) dx \\ - 2 \frac{l^2 \pi^2}{A^2} b_{ln} \frac{1}{2} \delta_{kn} \int_0^1 f'(x) \sin(l \pi x) \cos(i \pi x) dx \\ - n^2 \pi^2 b_{ln} \frac{1}{2} \delta_{kn} \int_0^1 f''(x) \sin(l \pi x) \cos(i \pi x) dx \\ \left. + \frac{l \pi}{A^2} b_{ln} \frac{1}{2} \delta_{nk} \int_0^1 f''(x) \cos(i \pi x) \cos(l \pi x) dx \right\} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Les termes issus de l'intégration suivant z peuvent s'exprimer explicitement en fonction des coefficients des fonctions d'essais choisies, ceux issus de l'intégration sur x ne peuvent s'exprimer qu'en fonction des intégrales de $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$

$$\begin{aligned} \sum_i \left[Ra^* \left[\frac{l^2 \pi^2}{A^2} \right] a_{ln} \delta_{il} - \left[\frac{l^2 \pi^2}{A^2} + n^2 \pi^2 \right] i \pi b_{ln} \delta_{il} \right. \\ - \left[\frac{l^2 \pi^2}{A^2} + n^2 \pi^2 \right] 2 l \pi b_{ln} \int_0^1 f(x) \cos(i \pi x) \cos(l \pi x) dx \\ - \left[4 \frac{l^2 \pi^2}{A^2} + 2 k \pi^2 \right] b_{ln} \int_0^1 f'(x) \sin(l \pi x) \cos(i \pi x) dx \\ \left. + \frac{2 l \pi}{A^2} b_{ln} \int_0^1 f''(x) \cos(i \pi x) \cos(l \pi x) dx \right] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

De même, l'intégration de l'équation de l'énergie stationnaire (7) sur l'ensemble du domaine fournit une relation entre a_{ln} et b_{ln} :

$$b_{ln} = \frac{\frac{l^2 \pi^2}{A^2} + n^2 \pi^2}{l \pi} a_{ln}. \quad (14)$$

Le système (4)–(6) peut donc s'écrire en fonction des seuls coefficients a_{ln} .

Par ailleurs, afin de pouvoir évaluer simplement les intégrales contenant $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$, nous avons utilisé un développement de $f(x)$ en série de cosinus, soit :

$$f(x) = \sum_{j=0}^J c_j \cos j\pi x. \quad (15)$$

Dans ces conditions, le système linéaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_i \left[Ra^* \left[\frac{i^2\pi^2}{A^2} \right] - \left[\frac{i^2\pi^2}{A^2} + n^2\pi^2 \right]^2 \delta_{ii} \right. \\ - \frac{1}{2} \left[\frac{l^2\pi^2}{A^2} + n^2\pi^2 \right]^2 [c_{i-l} + c_{i+l} + c_{i-1}] \\ + \frac{1}{4l} \left[4 + \frac{l^2\pi^2}{A^2} + 2n^2\pi^2 \right] \left[\frac{l^2\pi^2}{A^2} + n^2\pi^2 \right] \\ \times [(l-i)c_{i-l} + (l+i)c_{i+l} - (i-l)c_{i-1}] \\ - \frac{\pi^2}{2A} \left[\frac{l^2\pi^2}{A^2} + n^2\pi^2 \right] [(l-i)^2 c_{i-l} + (l+i)^2 c_{i+l} \\ \left. + (i-l)^2 c_{i-1}] \right] a_n = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Ce système linéaire peut être schématisé sous la forme :

$$Ra^*[D][A] + [B][A] = 0 \quad (17)$$

où $[D]$ représente une matrice diagonale, et $[A]$ un vecteur dont les composantes sont les coefficients spectraux de la fonction représentant la perturbation en température.

La recherche du nombre de Rayleigh critique est donc ramenée à un calcul de valeurs propres.

Le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre Ra_c^* représente, à un facteur de normalisation près, le poids des différents modes présents à l'apparition de la convection.

3.2. Résultats

Nous avons traité numériquement le cas :

$$K(x) = K_0(1 + \alpha \cos s\pi x) \quad (18)$$

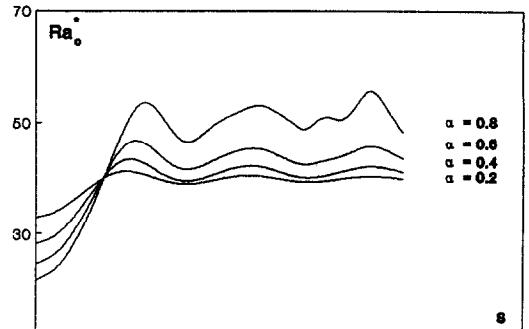
c'est à dire :

$$f(x) = -\frac{\alpha \cos s\pi x}{1 + \alpha \cos s\pi x}. \quad (19)$$

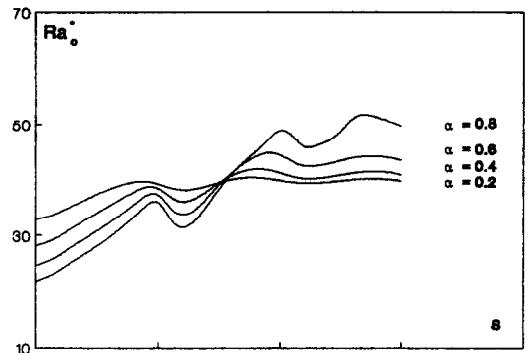
La Fig. 1 représente les variations du nombre de Rayleigh critique en fonction de s pour différentes valeurs de α , amplitude de la variation de perméabilité. L'ensemble de ces courbes possède des caractéristiques communes :

(1) Existence de maxima et de minima. Les abscisses de ces extrema varient peu avec α . On peut vérifier qu'elles coïncident avec celles des extrema de la valeur moyenne de la perméabilité. Lorsque cette moyenne est maximale, la valeur critique du nombre de Rayleigh est minimale, et inversement.

(2) Les valeurs critiques obtenues ne sont inférieures à $4\pi^2$ que pour $s < 1$, c'est à dire pour des couches où la perméabilité est en tout point supérieure à K_0 .



(a)



(b)

FIG. 1. Nombre de Rayleigh critique en fonction de s , pour différentes amplitudes de la perturbation ($\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$), et différents rapports de forme : (a) $L/H = 1$; (b) $L/H = 2$.

Enfin, le Tableau 1 indique les premières composantes des vecteurs propres associés à Ra_c^* . On peut notamment y remarquer que les modes d'ordre supérieur, en particulier le mode correspondant à deux rouleaux juxtaposés suivant x , dont la pondération est représentée par le coefficient a_{12} , tendent à s'établir pour les valeurs de s coïncidant au maximum de Ra_c^* . Dans les autres cas, le régime unicellulaire est largement prédominant.

3.2.1. Cas particulier : $s = 0$. Ce cas correspond à une couche homogène de perméabilité $K = K_0(1 + \alpha)$. Le développement (17) se réduit au seul terme $c_0 = -\alpha/(1 + \alpha)$, et le système (18) s'écrit :

$$\left\{ Ra^* \left(\frac{l^2\pi^2}{A^2} \right) - \left(\frac{l^2\pi^2}{A^2} + n^2\pi^2 \right)^2 (1 + c_0) \right\} a_n = 0. \quad (20)$$

Les valeurs propres de l'opérateur sont nulles pour :

$$Ra^* = \frac{\frac{l^2\pi^2}{A^2} + n^2\pi^2}{\frac{l^2\pi^2}{A^2}} (1 + c_0). \quad (21)$$

Dans le cas d'une cavité carrée, $A = 1$, la valeur

Tableau 1. Vecteur propre associé à la valeur Ra_c^* : modes à l'apparition de la convection naturelle, $K = K_0 (1 + 0,6 \cos s\pi x)$

s	Mode			
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
0	1	0	0	0
0,2	0,999	0,021	-0,001	0
0,4	0,997	0,082	-0,003	0
0,6	0,984	0,177	0,002	0,001
0,8	0,959	0,282	0,022	0,001
1,0	0,929	0,364	0,056	0,004
1,2	0,915	0,393	0,093	0,010
1,4	0,929	0,349	0,118	0,016
1,6	0,964	0,238	0,121	0,015
1,8	0,988	0,106	0,115	0,007
2,0	0,994	0	0,112	0
2,2	0,992	-0,066	0,109	0
2,4	0,992	-0,087	0,096	0,012
2,6	0,995	-0,066	0,109	0
2,8	0,998	0,007	0,031	0,049
3,0	0,994	0,093	0	0,056
3,2	0,985	0,165	-0,015	0,051
3,4	0,979	0,200	-0,012	0,038
3,6	0,983	0,182	0,005	0,023
3,8	0,994	0,102	0,029	0,009
4,0	0,998	0	0,048	0

critique s'obtient pour le mode unicellaire de base ($l = 1, n = 1$) :

$$Ra_c^* = 4\pi^2(1 + c_0) = \frac{4\pi^2}{1 + \alpha}. \quad (22)$$

On vérifie que les valeurs obtenues numériquement concordent parfaitement avec ces valeurs analytiques (cf. Fig. 1).

3.2.2. *Cas particulier s grand.* Equivalence avec un milieu homogène anisotrope.

Dans le cas où s devient grand, la couche peut être modélisée de la manière suivante :

(1) Quant à sa perméabilité horizontale, on assimile cette couche à une couche homogène, qui traversée par le même débit dans la direction horizontale, provoque la même perte de charge ; cette perméabilité

Tableau 2. Nombre de Rayleigh critique pour des couches anisotropes : a , d'après Castinel et Combarous [13] ; b , par extrapolation de nos résultats pour s grand

α	K_h^*	a	b
0,2	0,98	40,30	39,8
0,4	0,92	41,26	41,0
0,5	0,87	42,48	42,2
0,6	0,8	44,28	44,0
0,8	0,6	51,80	53,0

équivalente K_h^* est évaluée en imaginant la mise en série d'une infinité de couches élémentaires, soit :

$$\frac{1}{K_h^*} = \frac{s}{2K_0} \int_0^{2/s} \frac{dx}{1 + \alpha^2 \cos s\pi x} = \frac{1}{K_0(1 - \alpha^2)^{1/2}} \quad (23)$$

donc $K_h^* = K_0(1 - \alpha^2)^{1/2}$.

(2) Quant à sa perméabilité verticale, le même type de calcul, avec décomposition en strates parallèles à l'écoulement, conduit à :

$$K_v^* = K_0 \int_0^1 (1 + \alpha \cos s\pi x) dx = K_0 \left(1 + \frac{\alpha}{s\pi} \sin(s\pi) \right). \quad (24)$$

Si s croît, cette valeur de K_v^* tend vers K_0 .

Nous pouvons donc modéliser une couche localement isotrope mais non homogène, d'hétérogénéité périodique, cette période étant petite devant la longueur totale du milieu, par une couche non isotrope mais homogène, caractérisée par les perméabilités K_v^* et K_h^* .

La stabilité d'une telle couche a été étudiée par Castinel et Combarous [13]. Ils proposent pour valeur du nombre de Rayleigh critique, pour une couche d'extension $A = 1$:

$$Ra_c^* = \pi^2 \frac{(\sqrt{K_v} + \sqrt{K_h})^2}{K_v K_h}. \quad (25)$$

Nous avons rapporté les valeurs équivalentes évaluées ci-dessus dans cette expression, soit :

$$Ra_c^* = \pi^2 \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha^2})^2}{\sqrt{1 - \alpha^2}}. \quad (26)$$

Le Tableau 2 indique quelques valeurs numériques obtenues dans les différents cas que nous traitons. Nous avons vérifié que ces valeurs concordent très bien avec la valeur moyenne des deux derniers extrêmes des courbes obtenues numériquement.

La symétrie des rôles joués par K_v et K_h dans la formule (25), nous permet également de prévoir les valeurs critiques limites du nombre de Rayleigh pour des couches dont l'inhomogénéité serait de la forme :

$$K(z) = K_0 / (1 + \alpha \cos s\pi z)$$

et le nombre d'onde s assez grand.

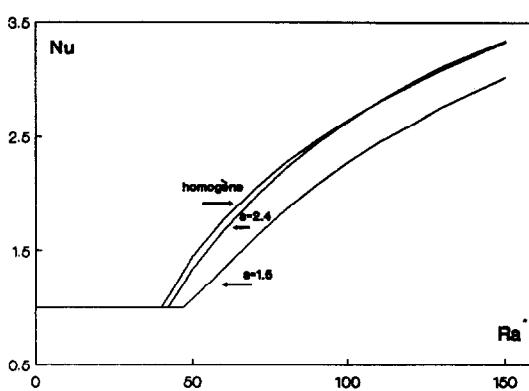


FIG. 2. Tracé comparatif de l'évolution du nombre de Rayleigh critique et du nombre de Nusselt (pour un Rayleigh de 60) en fonction de s , $\alpha = 0,6$.

Tableau 3. Comparaison entre un milieu poreux homogène et deux milieux poreux particuliers, $K(x) = K_0(1+\alpha \cos s\pi x)$

Homogène	$\alpha = 0,6$ $s = 1,63$	$\alpha = 0,6$ $s = 2,48$	
K_p^*	K_0	$1,38K_0$	$1,15K_0$
K_v^*	K_0	$0,89K_0$	$1,08K_0$
Ra_c^*	$4\pi^2 = 39,48$	47,12	41,28
Principales composantes des vecteurs propres à l'apparition de la convection naturelle			
a_{11}	1	0,97	0,99
a_{12}	0	0,22	-0,08
a_{13}	0	0,12	0,08
Nombre de Nusselt en régime permanent unicellulaire			
$Ra^* = 60$	1,78	1,20	1,51
$Ra^* = 80$	2,27	1,50	1,91
$Ra^* = 100$	2,64	1,71	2,19

4. CONVECTION NON LINÉAIRE

4.1. Méthodologie

Pour chaque valeur du nombre de Rayleigh supérieure à la valeur critique, déterminée précédemment, il existe au moins une solution au système (1), (3) pour laquelle la vitesse n'est pas uniformément nulle. Nous avons effectué une modélisation numérique bidimensionnelle de ces équations.

Celles-ci sont exprimées sous forme adimensionnelle, en tenant compte du rapport de forme de la cavité, $A = L/H$:

$$\frac{1}{A^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (27)$$

$$-\nabla p + Ra^* \mathbf{e}_3 T - (1+f(x))\mathbf{V} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left[\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] - \left[\frac{u}{A^2} \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] \quad (29)$$

avec $\mathbf{V} = U \mathbf{e}_1 + W \mathbf{e}_3$, vitesse de filtration. Les conditions aux limites du domaine sont celles spécifiées au chapitre 2.

La résolution du système (27), (29) est effectuée par une méthode spectrale de type Galerkin, développée en particulier par Gottlieb et Orzag [14]. Les fonctions d'essais en série de Fourier proposées vérifient les conditions aux limites, de même les composantes de la vitesse satisfont identiquement l'équation de continuité (27) :

$$T(x, z) = (1-z) + \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^N a_{ln} \cos l\pi x \sin n\pi z \quad (30)$$

$$u(x, z) = -A^2 \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N b_{ln} n\pi \sin l\pi x \cos n\pi z \quad (31)$$

$$w(x, z) = \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^N b_{ln} l\pi \cos l\pi x \sin n\pi z. \quad (32)$$

4.1.1. Cas où la perméabilité est fonction d'une seule variable d'espace.

$$K(x) = K_0(1+f(x)).$$

On peut dans ce cas appliquer le processus de Galer-

kin à l'équation du mouvement, permettant d'obtenir une relation simple entre les coefficients décrivant la température, a_{ik} , et ceux décrivant la vitesse, b_{ik} :

$$Ra^* i\pi a_{ik} - \sum_l [(A^2 n^2 + i^2) \pi^2 \delta_{il} + 2\pi^2 J_{il}] b_{lk} = 0 \quad (33)$$

expression dans laquelle J_{il} est l'intégrale :

$$J_{il} = il \int_0^1 f(x) \cos l\pi x \cos i\pi x \, dx + A^2 n^2 \int_0^1 f(x) \sin l\pi x \sin i\pi x \, dx.$$

On est donc amené à résoudre le système linéaire ci-dessous :

$$b_{in} = D^{-1} M^n a_{in}$$

où M^n est la matrice de coefficients :

$$M^n_{il} = (A^2 n^2 + i) \pi^2 \delta_{il} + 2\pi^2 J_{il}$$

et D la matrice diagonale définie par :

$$D_{il} = Ra^* l\pi.$$

4.1.2. Cas où la perméabilité est fonction des deux variables d'espace. Nous avons dans ce cas procédé à la résolution de l'équation du mouvement sous la forme :

$$\Delta\psi = (1+K(x, z)) \left(-Ra^* \frac{\partial \theta}{\partial x} + u \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad (34)$$

où ψ est la fonction de courant.

Pour le premier membre, le processus de Galerkin conduit à une formulation simple, le second membre est évalué par FFT.

Dans les deux cas l'équation de l'énergie (29) est intégrée dans le temps après introduction des développements (30), (32), ce qui fournit un système différentiel non linéaire régissant les coefficients de la température :

$$\frac{da_{ln}}{dt} = - \left[\frac{l^2}{A^2} + n^2 \right] \pi^2 a_{ln} + l\pi b_{ln} - N(a, b). \quad (35)$$

où $N(a, b)$ est un opérateur correspondant au terme convectif non linéaire $\mathbf{V} \cdot \nabla T$. Il est calculé à l'aide de transformées rapides de Fourier (FFT) : \mathbf{V} et ∇T sont évalués séparément dans le plan physique à l'aide de cette transformation, le produit $\mathbf{V} \cdot \nabla T$ est effectué dans cet espace, ensuite une FFT inverse détermine les coefficients spectraux correspondant à ce terme.

Le système différentiel (35) est intégré dans le temps, à partir d'un champ thermique initial, suivant un schéma aux différences de type Adams-Bashforth.

Les conditions initiales sont représentées dans l'espace de Fourier par les coefficients $a_{ik}(0)$, décrivant une perturbation en température superposée au régime conductif. La solution stationnaire recherchée est obtenue comme étant l'état asymptotique de ce régime transitoire. Dans un certain nombre de cas, cette solu-

tion dépend fortement de la structure imposée par les conditions initiales.

Le transfert de chaleur à la paroi $z = 0$ peut être évalué à partir du développement de la température :

$$Nu = \int_0^1 -\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} dx = 1 - \pi \sum_{k=1}^N k a_{0k}. \quad (36)$$

Pour la gamme de valeur du nombre de Rayleigh que nous explorons, avec les fonctions $K(x)$ envisagées, une approximation d'ordre 16 suffit à donner des résultats fiables ; nous avons pu vérifier que l'influence de l'ordre d'approximation sur le nombre de Nusselt limite ne dépasse alors pas 1%.

4.2. Solutions bidimensionnelles

En tenant compte des résultats acquis au chapitre 3, nous avons limité nos calculs systématiques à deux exemples caractéristiques. Ceux-ci correspondent aux valeurs de s qui conduisent aux premiers extrema de la valeur du nombre de Rayleigh critique, la valeur de α , mesurant l'amplitude de la perturbation étant choisie a priori égale à 0,6 (c'est à dire que la perméabilité varie dans la couche de $0,4K_0$ à $1,6K_0$).

Les champs de température calculés sont représentés sous forme de lignes isothermes, les champs de vitesse sous forme de lignes de courant.

Les lignes de courant mettent en évidence la très forte relation entre les zones de grande perméabilité et les zones de déplacement vertical du fluide saturant. Pour une même valeur du nombre de Rayleigh, les tracés montrent que l'organisation des cellules dépend étroitement de la répartition des perméabilités dans la couche. La déformation des lignes isothermes, par rapport au système conductif, indique de plus le sens de déplacement du fluide.

Les valeurs propres de l'opérateur associé au système (18) indiquent le poids respectif des différents modes à l'apparition de la convection. Le Tableau 1 montre qu'il y a une bonne corrélation entre les extrema de Ra_c^* et ceux de a_{13} ; le signe de a_{12} quant à lui détermine la nature de cet extrémum : maximum si a_{12} et a_{11} sont de même signe, minimum sinon. Remarquons enfin que l'amortissement de la courbe $Ra_c^*(s)$ est lié à la décroissance de la valeur absolue de a_{12} .

4.3. Etude comparative de deux exemples

Si on choisit pour référence une couche poreuse homogène, on constate que les mouvements convectifs de type rouleaux bidimensionnels sont caractérisés de manière générale par une valeur du nombre de Rayleigh critique supérieure à $4\pi^2$ dans le cas d'une élévation égale à 1. Pour des valeurs du paramètre s supérieures à 1, deux comportements extrêmes peuvent être mis en évidence, qui correspondent respectivement aux minima et maxima de la fonction $Ra_c^*(s)$; nous avons donc détaillé l'étude des deux cas $s = 1,63$ et $2,48$ (voir Tableau 3).

L'examen de la Fig. 3 fait apparaître que la forme des cellules convectives est fortement liée à la distribution des zones les plus perméables du milieu : les mouvements se développent préférentiellement dans les zones où la perméabilité est supérieure à K_0 ; les zones à faible perméabilité présentent un faible gradient de la fonction de courant. Ceci permet d'expliquer que suivant la valeur de s , pour une même valeur de α et du nombre de Rayleigh, le régime obtenu puisse être unicellulaire ($a_{11} > a_{12}$) ou bicellulaire ($a_{12} < a_{11}$) pour une même condition initiale bicellulaire : par exemple pour $Ra^* = 100$, le régime permanent obtenu est unicellulaire pour $s = 1,63$ et bicellulaire pour $s = 2,48$. Tous ces faits conduisent à penser que pour des valeurs assez faibles de s , les zones de plus grande perméabilité tendent à s'organiser, si possible comme des cavités isolées. Le nombre de Rayleigh critique correspond lui aussi à une géométrie réduite à ces zones perméables, et dans le cas où $s = 1,63$, ce nombre est le même que celui d'un milieu homogène placé dans une cavité de rapport de forme $A \approx 0,72$, valeur évaluée d'après Beck [15].

Nous avons porté sur la Fig. 4 l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh dans trois cas : une couche homogène et deux couches non homogènes (amplitude de la perturbation $\alpha = 0,6$, nombres d'onde $s = 1,5$ et $2,4$). Le cas le plus favorable à la convection conduit pour de faibles valeurs du nombre de Rayleigh, à un transfert sensiblement équivalent à celui d'une couche homogène ; pour des valeurs plus grandes, le transfert est même légèrement plus important, ceci étant sans doute lié à un facteur de forme plus favorable. Pour ce qui est du cas non favorable à la convection, non seulement le Rayleigh critique est plus élevé, mais la pente de la courbe $Nu(Ra^*)$ est plus faible que dans les cas précédents. Ceci peut également être lié aux valeurs moyennes de la perméabilité horizontale équivalente, qui dans un cas est supérieure à K_0 , dans l'autre cas, inférieure.

5. CONCLUSION

Les milieux poreux naturels, tels les réservoirs géologiques, possèdent des propriétés quelquefois homogènes dans une couche donnée, cependant, certaines grandeurs peuvent sensiblement évoluer dans l'espace, par exemple la perméabilité : sa variation peut atteindre des facteurs considérables, d'un facteur 100 par exemple, dans un milieu qu'un géologue considérera comme homogène. Bien sûr, les autres caractéristiques du milieu sont également concernées. Dans notre étude, ni les variations de porosité, ni les variations de conductivité thermique ne sont prises en compte ; cependant nous avons étudié l'influence du paramètre qui nous semblait avoir la plus grande variation dans les milieux envisagés.

Sur un exemple particulier de distribution de la perméabilité nous avons déterminé les critères

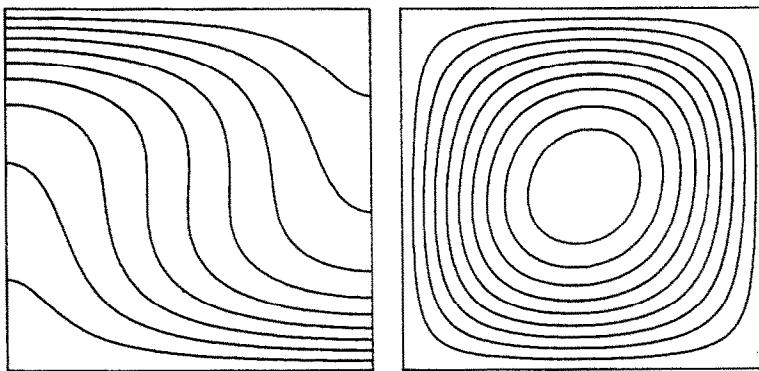


FIG. 3(a).

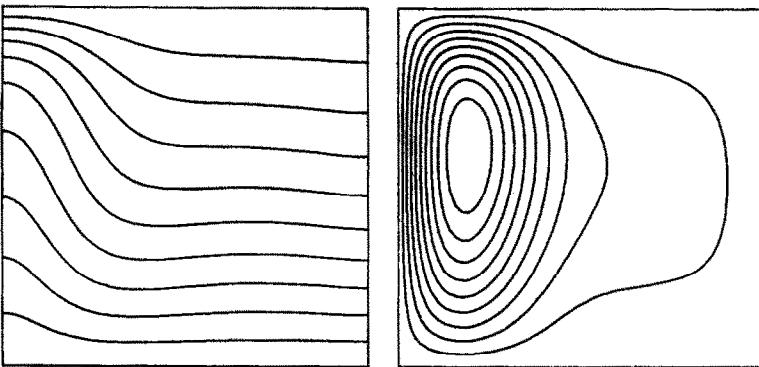


FIG. 3(b).

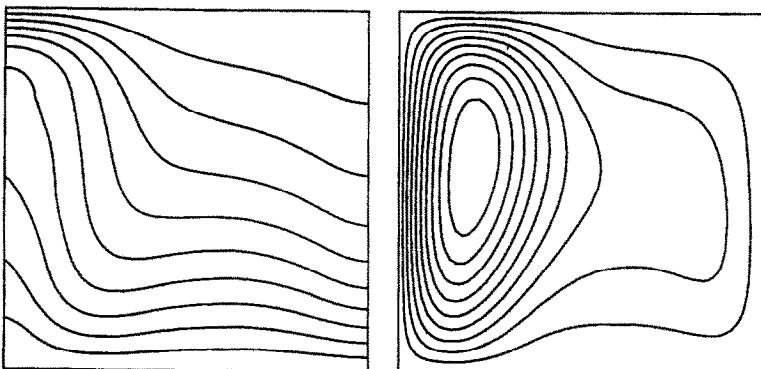


FIG. 3(c).

d'apparition de la convection naturelle, en fonction de l'amplitude et du nombre d'onde de la perturbation. Dans l'ensemble, l'apparition de la convection naturelle est défavorisée par l'existence des inhomogénéités, et les nombres de Rayleigh critiques sont supérieurs à $4\pi^2$. Nous avons également mis en évidence que certaines configurations sont plus favorables que d'autres : pour une cellule de section carrée, ces configurations sont celles pour lesquelles la perméabilité le long des parois verticales est supé-

rieure ou égale à la valeur de référence K_0 . L'étude des modes propres à l'apparition de la convection montre que dans ces conditions, les coefficients des modes (11) et (12) sont de même signe, alors que celui du mode (13) est nul. Dans les cas de petits nombres d'onde, nous avons pu vérifier la bonne concordance de nos résultats avec ceux de la littérature.

L'intégration des équations non linéaires a été réalisée pour une distribution bidimensionnelle de la perméabilité. La variation du nombre de Nusselt en

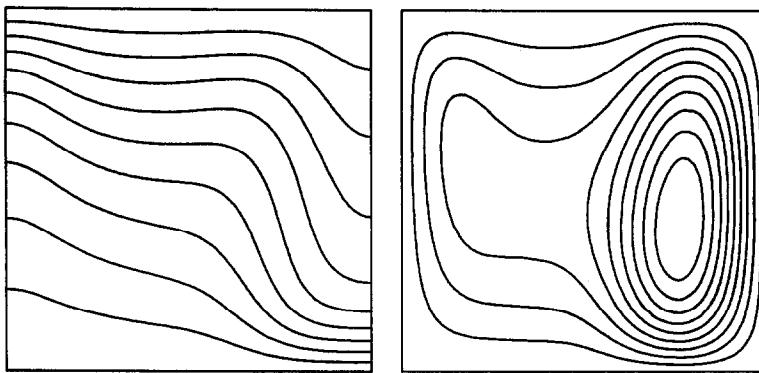


FIG. 3(d).

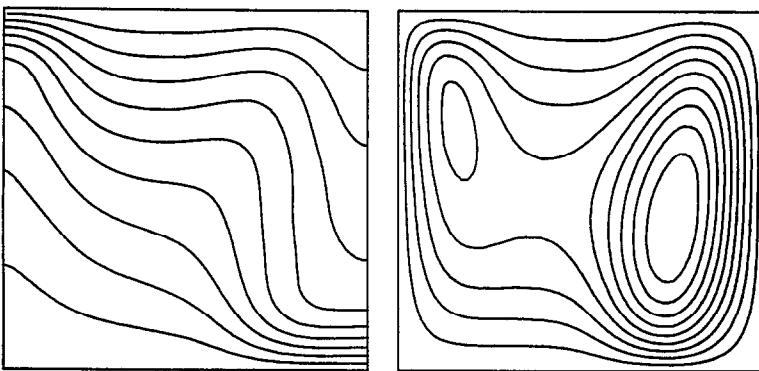


FIG. 3(e).

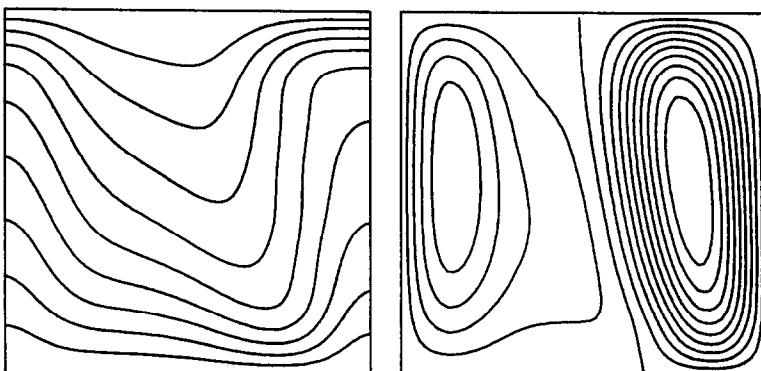


FIG. 3(f).

FIG. 3. Isothermes et lignes de courant dans différents cas ($L/H = 1$) : (a) $K = K_0$, $Ra = 80$, C.I. 1 rouleau ; (b) $K = K_0(1 + 0.9 \cos(1.63\pi x))$, $Ra = 80$, C.I. 1 rouleau ; (c) $K = K_0(1 + 0.9 \cos(1.63\pi x))$, $Ra = 120$, C.I. 1 ou 2 rouleaux ; (d) $K = K_0(1 + 0.9 \cos(2.48\pi x))$, $Ra = 80$, C.I. 1 rouleau ; (e) $K = K_0(1 + 0.9 \cos(2.48\pi x))$, $Ra = 120$, C.I. 1 rouleau ; (f) $K = K_0(1 + 0.9 \cos(2.48\pi x))$, $Ra = 120$, C.I. 2 rouleaux.

fonction du nombre d'onde, pour une valeur du nombre de Rayleigh de 100, est en bonne concordance avec celle des nombres de Rayleigh critiques. Enfin les courbes Nusselt-Rayleigh sont également légèrement déformées pour des milieux non homogènes, principalement dans les configurations les plus défavorables à l'apparition de la convection.

Nous ne saurions terminer ce travail sans mentionner le caractère restrictif des études bidimensionnelles en matière de convection naturelle, un grand nombre de possibilités de mouvements convectifs ne peut être correctement envisagé que dans le cadre d'une modélisation, ou d'une étude expérimentale tridimensionnelle.

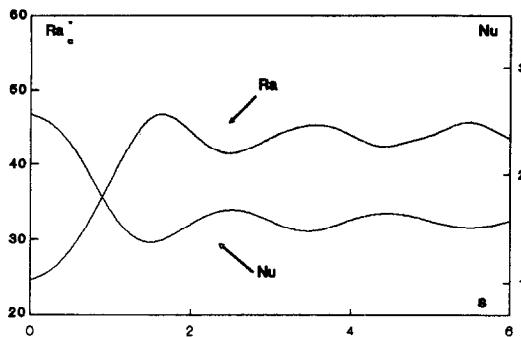


FIG. 4. Influence de l'hétérogénéité sur le transfert de chaleur : $\alpha = 0$, couche homogène ; $\alpha = 0,6$, couches hétérogènes, $s = 1,5$ et $2,4$.

Les auteurs remercient le PIRSEM-CNRS qui a financé les calculs nécessaires à cette étude dans le cadre d'une ATP consacrée à la géothermie.

BIBLIOGRAPHIQUES

1. C. W. Horton and F. T. Rogers, Convection currents in a porous medium, *J. Appl. Phys.* **16**, 367 (1945).
2. T. Green and R. L. Freehill, Marginal stability in inhomogeneous porous media, *J. Appl. Phys.* **40**, 1759 (1969).
3. R. J. Ribando and K. E. Torrance, Natural convection in a porous medium: effects of confinement, variable permeability and thermal boundary conditions, *Trans. ASME, J. Heat Transfer* **98**, 42 (1976).
4. R. N. Horne and M. J. O'Sullivan, Convection in a porous medium heated from below: the effect of temperature dependent viscosity and thermal expansion coefficient, *Trans. ASME, J. Heat Transfer* **100**, 448 (1978).
5. K. M. Gjerde and P. A. Tyvand, Thermal convection in a porous medium with continuous periodic stratification, *Int. J. Heat Mass Transfer* **27**, 2289 (1984).
6. S. I. Gheorghita, The marginal stability in porous inhomogeneous media, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **57**, 871 (1961).
7. O. Kvernold and P. A. Tyvand, Nonlinear thermal convection in anisotropic porous media, *J. Fluid Mech.* **90**, 609 (1979).
8. R. McKibbin and M. J. O'Sullivan, Onset of convection in a layered porous medium heated from below, *J. Fluid Mech.* **96**, 375 (1980).
9. R. McKibbin and M. J. O'Sullivan, Heat transfer in a layered porous medium heated from below, *J. Fluid Mech.* **111**, 141 (1981).
10. J. P. Richard and J. Gounot, Critère d'apparition de la convection naturelle dans des couches poreuses stratifiées, *Int. J. Heat Mass Transfer* **24**, 1325 (1981).
11. R. McKibbin and P. A. Tyvand, Anisotropic modelling of thermal convection in multilayered porous media, *J. Fluid Mech.* **118**, 315 (1982).
12. J. P. Caltagirone, *Convective Transport and Instability Phenomena* (Edited by J. Zierep and H. Oertel). G. Braun, Karlsruhe (1982).
13. G. Castinel and M. Combarbous, Natural convection in an anisotropic porous layer, *Int. Chem. Engng* **17**(4), 605 (1977).
14. A. Gottlieb and S. A. Orzag, *Numerical Analysis of Spectral Methods. Theory and Applications*, Regional Conf. Series in Appl. Math., Vol. 26. Arrowsmith (1977).
15. J. L. Beck, Convection in a box of porous material saturated with a fluid, *Physics Fluids* **15**, 1377 (1972).

STABILITY AND NATURAL CONVECTION IN NON-HOMOGENEOUS POROUS LAYER

Abstract—Free convection is studied in a porous layer, the permeability of which is not uniform, depending on the horizontal coordinate. A general method is set up to estimate the criterion for onset of convection. Some applications are presented for periodic variations of permeability. They show the equivalence between layers with short scale permeability fluctuations and homogeneous anisotropic media. Finally, some numerical computations with Galerkin's method are derived on streamline patterns and overall heat transfer.

STABILITÄT UND NATÜRLICHE KONVEKTION IN NICHTHOMOGENEN PORÖSEN SCHICHTEN

Zusammenfassung—Die freie Konvektion in einer porösen Schicht, deren Permeabilität von der horizontalen Koordinate abhängt, wird untersucht. Eine allgemeine Methode zur Bestimmung des Kriteriums für Konvektionsbeginn wird entwickelt. Es werden einige Anwendungen mit periodischer Variation der Permeabilität vorgestellt. Sie zeigen die Äquivalenz zwischen Schichten mit fein aufgelösten Permeabilitätschwankungen und homogenen anisotropen Medien. Schließlich werden einige numerische Berechnungen mit der Galerkin-Methode für Stromlinienfelder und den Gesamtwärmetransport ausgeführt.

УСТОЙЧИВОСТЬ И ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ В НЕОДНОРОДНОМ ПОРИСТОМ СЛОЕ

Аннотация—Исследуется свободная конвекция в пористом слое с неоднородной вдоль горизонтальной координаты проницаемостью. Разработан общий метод для оценки критерия возникновения конвективного движения. Представлены некоторые приложения для периодических изменений проницаемости, которые показывают эквивалентность между слоями с мелкомасштабными флюктуациями проницаемости и однородными анизотропными средами. С помощью метода Галеркина проведены некоторые численные расчеты картин линий тока и общего теплопереноса.